# 12 ТҮПНҰСҚАЛАР МЕН КЕСКІНДЕРДІҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНУЫ, ИНТЕГРАЛДАНУЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ КӨБЕЙТІНДІСІ

## 12.1 Түпнұсқалар мен кескіндердің дифференциалдануы

***Түпнұсқалардың дифференциалдануы***

Егер $f(t) \div F(p)$ және $f'(t), f''(t), ..., f^{(n)}(t)$ функциялары түпнұсқалар болса, онда

$$f'(t) \div p \cdot F(p) - f(0), \tag{12.1}$$

$$f''(t) \div p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0), \tag{12.2}$$

$$f'''(t) \div p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0), \tag{12.3}$$

.........................................................................,

$$f^{(n)}(t) \div p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - ... - f^{(n-1)}(0). \tag{12.4}$$

*Ескерту*: (12.1)-(12.4) формулалары нөлдік бастапқы шартарында қарапайым түрде беріледі: егер $f(0)=0$ болса, онда $f'(t) \div p \cdot F(p)$; егер $f(0)=f'(0)=0$ болса, онда $f''(t) \div p^2 \cdot F(p)$, соңында, егер $f(0)=f'(0)=...=f^{(n-1)}(0)=0$ болса, онда $f^{(n)}(t) \div p^n \cdot F(p)$, яғни түпнұсқаның дифференциалдануына оның кескінін р айнымалысына көбейту сәйкес қойылады.

Қарастырылған түпнұсқаның дифференциалдану қасиеті сызықтылық қасиетімен бірге сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуде кеңінен қолданылады.

***Кескіндердің дифференциалдануы***

Егер $f(t) \div F(p)$ болса, онда

$$F'(p) \div -t \cdot f(t),$$

$$F''(p) \div (-1)^2 t^2 \cdot f(t),$$

....................................,

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t),$$

....................................,

яғни кескіннің дифференциалдануына оның түпнұсқасының $(-t)$ айнымалысына көбейтілуі сәйкес келеді.

$$t^n\ (n \in N), e^{at} \cdot t^n, t \cdot \sin \omega t, t \cdot \cos \omega t, t \cdot sh\omega t, t \cdot ch\omega t, e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t, e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t$$

функцияларының кескіндерін табайық. $1 \div \frac{1}{p}$ болғандықтан, кескіннің дифференциалдану қасиеті бойынша

$$-t \cdot 1 \div -\frac{1}{p^2},$$

яғни

$$t \div \frac{1}{p^2}.$$

Бұдан $-t^2 \div \left(\frac{1}{p^2}\right)'_p = -\frac{2}{p^3}$, яғни $t^2 \div \frac{2!}{p^3}$. Дифференциалдау үрдісін жалғастыра отырып

$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

сәйкестігін аламыз.
Жылжыту қасиетін есепке алсақ

$$e^{at} \cdot t^n \div \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

(11.4) формуласына сүйенсек $\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Бұдан

$$\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)'_p \div -t \sin \omega t,$$

яғни $-\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \div -t \sin \omega t$ немесе

$$t \sin \omega t \div \frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \qquad (12.5)$$

Сәйкесінше, (11.5), (11.6), (11.7) формулаларына кескінді дифференциалдау ережесін қолдансақ

$$t \cos \omega t \div \frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}, \qquad (12.6)$$

$$t\,sh\, \omega t \div \frac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2},$$

$$t\,ch\, \omega t \div \frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$$

сәйкестіктерін аламыз.
Жылжыту қасиетін есепке ала отырып, (12.5), (12.6) формулаларының көмегімен

$$e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t \div \frac{2\omega(p-a)}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)^2},$$

$$e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t \div \frac{(p-a)^2-\omega^2}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)^2}$$

сәйкестіктеріне келеміз.

## 12.2 Түпнұсқалар мен кескіндердің интегралдануы

***Түпнұсқалардың интегралдануы***

Егер $f(t) \div F(p)$ болса, онда $\int\limits_0^t f(\tau)\cdot \mathrm{d}\tau \div \dfrac{F(p)}{p}$, яғни түпнұсқаны *0*-ден *t*-ға дейін интегралдау оның кескінін *p*-ға бөлуге сәйкес келеді.

***Кескіндердің интегралдануы***

Егер $f(t) \div F(p)$ және $\int\limits_p^{\infty} F(\rho)\cdot \mathrm{d}\rho$ интегралы жинақты болса, онда

$$\int\limits_p^{\infty} F(\rho)\cdot \mathrm{d}\rho \div \frac{f(t)}{t},$$

яғни кескінді *p*-дан ∞-ке дейін интегралдау оның түпнұсқасын *t*-ға бөлуге сәйкес келеді.

## 12.3 Түпнұсқалар мен кескіндердің көбейтіндісі

***Кескіндердің көбейтіндісі***

Егер $f_1(t) \div F_1(p)$ және $f_2(t) \div F_2(p)$ болса, онда

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \div \int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau \qquad (12.7)$$

болады.

(12.7) формуласының оң жағындағы интеграл $f_1(t), f_2(t)$ функцияларының *орамы* деп аталып $f_1(t) * f_2(t)$ нышанымен белгіленеді, яғни

$$f_1(t) * f_2(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau .$$

Бұнда $t-\tau = u$ деп алып ораманың көбейткіштердің орнын ауыстыру заңына бағынатынын, яғни $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$ теңдігінің орынды болатынына көз жеткізуге болады.

Сонымен, кескіндердің көбейтіндісіне сәйкес түпнұсқа көбейткіштердің түпнұсқаларының орамасына тең, яғни

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \div f_1(t) * f_2(t).$$

*Салдар***.** Егер $f_1 * f_2 \div F_1(p)\cdot F_2(p)$ және $f_1'(t)$ түпнұсқа болса, онда

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p) \div \int\limits_0^t f_1'(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau + f_1(0)\cdot f_2(0). \qquad (12.8)$$

(12.8) формуласы *Дюамель формуласы* деп аталады.

Ораманың ауыстырымдылығының қасиеті негізінде Дюамель формуласын келесі түрде бере аламыз

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p) \div \int\limits_0^t f_2(\tau)\cdot f_1'(t-\tau)\cdot d\tau + f_2(t)\cdot f_1(0)$$

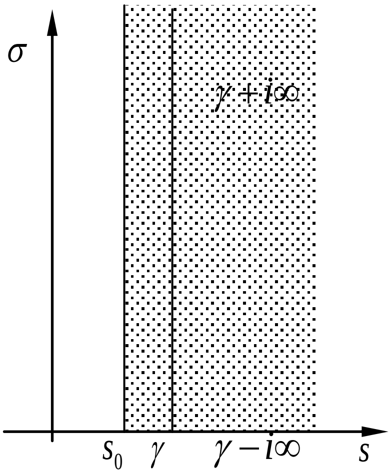
Дюамель формуласын белгілі кескіндер бойынша түпнұсқаларды анықтауға қолдануға болады.

***Түпнұсқалардың көбейтіндісі***

Егер $f_1(t) \div F_1(p)$ және $f_2(t) \div F_2(p)$ болса, онда

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \div \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1(z)\cdot F_2(p-z)dz,$$

мұндағы интегралдау жолы - $\operatorname{Re} p = \gamma > s_0$ вертикаль түзуі (14-сурет).




14-сурет